Schnell mal was ausrechnen

Der Computer wird gemeinhin auch als Rechner bezeichnet. Allerdings wird heutzutage gebrowst, gesurft, gemailt, gechattet nur gerechnet wird mit PC oder Notebook kaum noch. Dabei stehen Programme zur Verfügung, die den Umgang mit Zahlen und Rechnungen für einfache und gehobene Ansprüche erleichtern. Dieser Artikel zeigt, welche Rechen-Anwendungen für welchen Zweck geeignet sind.

Taschenrechner

Für einfache Rechnungen bietet sich der Taschenrechner an, welcher im Menü *Zubehör* zu finden ist. Er ist selbsterklärend und bedarf an dieser Stelle keiner weiteren Einführung. Kleine Rechnungen werden meist benötigt wenn man gerade in anderen Programmen unterwegs ist. Da ist es praktisch den Taschenrechner mit einem Hotkey starten zu können. Über das Menü *System – Einstellungen – Tastenkombination* kann der Taschenrechner z. B. auf die Taste ALT+R gelegt werden. Damit hat man den Rechner jederzeit schnell zur Hand ohne im Menü herumsuchen zu müssen. Für kleine Einsteins oder Banker, die mal schnell die neusten Subprime-Verluste ausrechnen wollen, gibt es die Ansichten *Finanztechnisch* und *Wissenschaftlich*. In diesen Ansichten stehen viele erweiterte Funktionen zur Verfügung.

Tabellenkalkulation

Wem die einfachen Möglichkeiten des Taschenrechners nicht genügen, dem ist vielleicht mit der Tabellenkalkulation besser gedient. Als Standard kommt Ubuntu mit *OpenOffice* und dessen Tabellenkalkulation *Calc* daher. Auch hierzu ist keine weitere Information nötig, denn wer schon einmal mit *Excel* oder einem anderen Spreadsheet gearbeitet hat, findet sich in *OpenOffice.Calc* sofort zurecht. Einen wesentlich Unterschied gibt es aber doch; *OpenOffice.Calc* macht keine Rechenfehler. Wer sich mit Tabellenkalkulationen noch nicht so gut auskennt, dem sei das Dokumentationsportal [1] empfohlen. Dort befinden sich deutschsprachige Handbücher zu allen *OpenOffice* Anwendungen.

Maxima

Es soll Schüler und Studenten geben, die auch mal eine Kurvendiskussion berechnen, eine Matrix invertieren oder ein Integral ausrechnen möchten. Für solche Aufgaben gibt es Mathematik-Programme, die weit über die bisher genannten Möglichkeiten hinaus gehen. Ein Vertreter dieser Gattung ist *Maxima*, ein Computeralgebrasystem, welches auf symbolisch-analytische Berechnung spezialisiert ist aber auch für numerische Berechnungen verwendet werden kann. Da *Maxima* über die Kommandozeile bedient wird ist es ratsam, eine grafische Oberfläche wie z. B. *wxMaxima* mit zu installieren. Die beiden Pakete **maxima** und **wxmaxima** werden über das Menü *System – Systemverwaltung – Synaptic* Paketverwaltung installiert. Daraufhin erscheinen entsprechende Einträge im Menü *Bildung*. Es genügt *wxMaxima* zu starten; die eigentliche Rechenmaschine *Maxima* muss nicht separat gestartet werden.

Nach dem Starten ist *wxMaxima* bereit für Benutzereingaben. Die Anwendung sieht nicht besonders spektakulär aus, glänzt aber mit inneren Werten.

Aufgabe 1: Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten

Fritz möchte ein Auto kaufen. Das Auto wird mit Benzinmotor für 30'000 SFr und mit Dieselmotor für 35'000 SFr angeboten. Fritz fährt im Jahr 20'000 km. Der Benzinmotor verbraucht 7L/100km und der Dieselmotor 5.5L/100km. Ein Liter Benzin kostet 1.73 SFr und ein Liter Diesel kostet 1.77 Sfr. Nach wie vielen Jahren ist der Dieselwagen günstiger als der Benziner?

Nach ein paar einfachen Vorrechnungen ergeben sich zwei Gleichungen:

```
Für den Benziner:
f(x) = 30'000 + 2'422 * x

Für den Diesel:
f(x) = 35'000 + 1'947 * x
```

Der Schnittpunkt dieser beiden Geraden ergibt den Jahreswert, bei dem beide Autos gleich teuer sind. Danach wird der Diesel billiger.

Die Funktionen werden in *wxMaxima* wie folgt eingegeben:

Mit der Taste *2D Plotten...* können beide Funktionen zusammen in einem Koordinatensystem angezeigt werden.

Im Feld Ausdrücke müssen die beiden Funktionen f1 und f2 eingetragen werden und für die beiden Variablen x und y die Wertebereiche.

Als Ergebnis werden nun die beiden Graphen der Funktionen gezeigt; der Benziner in blau und der Diesel in rot. Es ist zu erkennen, dass sich die Geraden bei ca. 10 Jahren schneiden. Ab diesem Punkt wird der Benzinmotor durch den höheren Verbrauch teurer als der Dieselmotor. Ab welchem Zeitpunkt dies genau der Fall ist, kann *Maxima* berechnen.

Hierfür genügt es, die beiden Funktionen gleichzusetzen. Die Eingaben von *f1(x) = f2(x)* führt zu folgendem Ergebnis:

```
2422*x+30000=1947*x+35000
```

Das ist zwar korrekt und hübsch umgeformt, allerdings noch nicht das erwartete Ergebnis. Um dieses zu erhalten muss die *Solve* Funktion verwendet werden.

Wie Abbildung 6 zeigt, berechnet der Befehl *Solve* das Ergebnis der Gleichsetzung von f1 und f2, nämlich x = 200/19. Wen der numerische Wert interessiert, kann mit dem Befehl *numer:true* umschalten und die Gleichung nochmals auflösen lassen. Nun wird das numerische Ergebnis für x angezeigt. Beim Wert von 10.52 Jahren schneiden sich die beiden Gleichungen. Ab dann werden die Kosten für den Dieselmotor günstiger als für den Benziner.

Tipp: Mit den Cursortasten kann in der Historie der Eingaben geblättert werden. Das erspart sehr viel Arbeit, da die bisherigen Eingaben angezeigt und bearbeitet werden können.

Aufgabe 2: Kurvendiskussion

Analysiere das Polynom:

Als erstes wird die Funktion in *wxMaxima* definiert:

```
f(x):=(1/3)*x^3-2*x^2+3*x
```

Diese wird vom Programm dann wie oben gezeigt dargestellt.

Als erstes interessieren die Nullstellen der Funktion. Mit dem Befehl:

solve([f(x)=0], [x]) teilen wir *Maxima* mit, dass es die Nullstellen berechnen soll. Das Ergebnis lautet: [x = 3 , x = 0]. Demnach gibt es zwei Nullstellen in dieser Funktion. Ein Blick auf den Graphen, den wir mit der Taste 2D Plotten anzeigen lassen, bestätigt das Rechenergebnis.

Als nächstes interessieren die Hoch- und Tiefpunkte. Diese befinden sich an den Nullstellen der ersten Ableitung. In *Maxima* lautet der Befehl zum Differenzieren einer Funktion:

```
diff(f(x), x)
```

Als erste Ableitung wird das Polynom: $x^2 - 4x + 3$

ausgegeben. Dessen Nullstellen kann man wieder mit:

```
solve([x^2 – 4x + 3], [x])
```

berechnen lassen.

Das Ergebnis ist: [x = 3 , x = 1]. An diesen Stellen befinden sich die Hoch- und Tiefpunkte der Ausgangsfunktion. Auch das lässt sich im Diagramm leicht nachvollziehen.

Nun fehlen nur noch die Wendepunkte der Funktion. Diese ergeben sich aus der zweiten Ableitung. Diese wird mit: diff($x^2 - 4x + 3$, x) errechnet. Als Ergebnis zeigt das Programm die Funktion $2x - 4$ an. Die Nullstellen ermitteln wir mit:

```
solve([2*x-4], [x])
```

Es gibt nur einen Wendepunkt bei x = 2.

Die Aufgabe ist gelöst; *Maxima* hat für uns die Nullstellen, Hoch/Tiefpunkte und den Wendepunkt berechnet.

Aufgabe 3: Lineares Gleichungssystem

Gegeben sei folgendes Gleichungssystem:

```
2x + 3y – 4z = -3

4x – 2y + 3z = -14

3x – 4y – 2z = 14
```

Welche Werte für x, y und z erfüllen das Gleichungssystem?

Um diese Aufgabe zu lösen, kann die Matrizenrechnung verwendet werden. Maxima bietet dafür eine Vielzahl an Befehlen und Funktionen. Als erstes muss die Matrix für die linke Seite beschrieben werden. Die Eingabe dafür lautet:

```
a:matrix([2,3,-4],[4,-2,3],
[3,-4,-2])
```

Somit steht in der Matrix mit dem Namen a die linke Seite des Gleichungssystems. Als nächstes wird die rechte Seite definiert:

```
b:matrix([-3,14,-14])
```

Das war bereits der grösste Teil der Arbeit. Durch Multiplikation der invertierten Matrix a mit der Matrix b ergibt sich der Lösungsvektor:

```
x = invert(a).b       =>
x = [2, 3, 4]
```

Dies sind die Werte für x, y und z.

In wxMaxima stellt sich die Lösung der Aufgabe so dar:

Die in diesem Artikel beschriebenen Aufgaben zeigen lediglich einen kleinen Teil der Möglichkeiten, die Maxima bietet. Wer sich näher für die Fähigkeiten dieses Algebra-Programms interessiert, findet im Hilfemenü von wxMaxima diverse Unterstützung. Neben der üblichen Hilfe, kann eine Beschreibung einzelner Funktionen direkt aufgerufen werden. Ausserdem gibt es Beispiele, an denen sich der Umgang mit der Funktion viel leichter verstehen lässt.

Wem das alles immer noch zu kompliziert ist, dem sei das Online Tutorial [2] des Austrian Center for Didactics of Computeralgebra empfohlen. Dort wird didaktisch gut und anschaulich Maxima unter der Oberfläche wxMaxima erklärt. Mit den praktischen Beispielen macht es viel mehr Spass sich in die Software einzuarbeiten als mit der eher trockenen Hilfe.

Ralf Hersel
rhersel@yalmagazine.org

Link-Box

[1] OpenOffice Dokumentationsportal: http://de.openoffice.org/doc/

[2] Maxima Online Tutorial: http://www.austromath.at/daten/maxima/index.htm